Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

6η Εβδομάδα

Θεώρημα 1.6 *(συνεχούς εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα). Έστω* $\mathbf{x}(t)$*,* $\mathbf{y}(t)$ *είναι δυο λύσεις της εξίσωσης* (1.1) *ορισμένες στο* $|t-t_0|<T$*. Έστω ότι η* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)$ *είναι* $Lipschitz$ *συνεχής ως προς* $\mathbf{x}$ *με σταθερά* K *και συνεχές ως προς* t *σε ένα χωρίο* $\Omega\times(t_0-T,t_0+T)$*,* $\Omega\subset\mathbf{R}^n$*. Τότε*

$$|\mathbf{x}(t_0+h)-\mathbf{y}(t_0+h)|\le e^{K|h|}|\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{y}(t_0)|. \tag{1.10}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την

$$\sigma(t)=|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)|^2\equiv\sum_{i=1}^n\Big(x_i(t)-y_i(t)\Big)^2.$$

Για την παράγωγο της $\sigma(t)$ παίρνουμε

$$\sigma'(t)=2\big(\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)\big)\cdot\big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)\big)\le 2\big|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)\big|\,\big|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)\big|\le$$
$$2K|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2K\sigma(t).$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $Cauchy-Schwartz$ και την υπόθεση ότι η διανυσματική συνάτηση (διανυσματικό πεδίο) είναι $Lipschitz$ συνεχής. Συνεπώς

$$\big(\sigma'(t)-2K\sigma(t)\big)e^{-2Kt}\le 0\quad\Leftrightarrow\quad\big(\sigma(t)e^{-2Kt}\big)'\le 0.$$

Η $\sigma(t)e^{-2Kt}$ είναι μη αύξουσα. Έστω $h>0$, τότε

$$\sigma(t_0+h)e^{-2K(t_0+h)}\le\sigma(t_0)e^{-2Kt_0}$$

δηλαδή

$$\sigma(t_0+h)\le\sigma(t_0)e^{2Kh}.$$

Εξάγοντας την τετραγωνική ρίζα αποδεικνύουμε την (1.10) για $h>0$.

Έστω τώρα $h<0$. Προφανώς

$$-\sigma'(t)\le|\sigma'(t)|\le 2K\sigma(t).$$

Συνεπώς

$$\big(\sigma'(t)+2K\sigma(t)\big)e^{2Kt}\ge 0\quad\Leftrightarrow\quad\big(\sigma(t)e^{2Kt}\big)'\ge 0.$$

Άρα η $\sigma(t)e^{2Kt}$ είναι μη φθίνουσα και

$$\sigma(t_0+h)\le\sigma(t_0)e^{2K(-h)}.$$

Απ' όπου προκύπτει η (1.10) για $h<0$.

□

Από το Θεώρημα 1.6, ως πόρισμα, αμέσως προκύπτει και το θεώρημα μοναδικότητας. Θα διατυπώσουμε ένα άλλο πόρισμα αυτού του θεωρήματος:

Πόρισμα 1.1. Έστω $\mathbf{x}(t,\mathbf{c})$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)\ \text{ και }\quad \mathbf{x}=\mathbf{c}\ \text{ για }\ t=t_0.$$

Έστω ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, και έστω η συνάρτηση $\mathbf{x}(t,\mathbf{c})$ είναι ορισμένη στο $|\mathbf{c}-\mathbf{c}^0|\le L$, $|t-t_0|\le T$. Τότε

1. $\mathbf{x}(t,\mathbf{c})$ είναι συνεχής ως προς τις μεταβλητές $(t,\mathbf{c})$, δηλαδή

$$\lim_{(t,\mathbf{c})\to(t_0,\mathbf{c}_0)}\mathbf{x}(t,\mathbf{c})=\mathbf{x}(t_0,\mathbf{c}_0).$$

2. Αν $\mathbf{c} \to \mathbf{c}_0$ τότε $\mathbf{x}(t, \mathbf{c}) \to \mathbf{x}(t, \mathbf{c}_0)$ ομοιόμορφα για $|t - t_0| \le T$.

Και οι δυο ισχυρισμοί προκύπτουν από την εκτίμηση (1.10).

Θεώρημα 1.7 *(συνεχούς εξάρτησης από τα δεδομένα του προβλήματος). Έστω $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ είναι λύσεις των συστημάτων*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{y}, t),$$

αντίστοιχα, στο διάστημα $|t - t_0| < T$. Έστω $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι ορισμένα σε κάποιο χωρίο $D \subset \mathbf{R}^n \times (-T + t_0, T + t_0)$ και στο χωρίο αυτό

$$|\mathbf{F}(\mathbf{z}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{z}, t)| \le \varepsilon.$$

Έστω $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ είναι $Lipschitz$ συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \le |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| e^{K|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{K}[e^{K|t-t_0|} - 1]. \tag{1.11}$$

Παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται η συνάρτηση $\mathbf{G}$ να είναι $Lipschitz$ συνεχής.

Απόδειξη. Οπως και στο προηγούμενο θεώρημα εισάγουμε την

$$\sigma(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της $\sigma(t)$

$$\sigma'(t) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)) +$$
$$+ 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$, παίρνουμε

$$|\sigma'(t)| \le 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}||\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)| + 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}||\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)|.$$

Αφού

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)| \le K|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \text{ και } |\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)| \le \varepsilon,$$

καταλήγουμε σε μια διαφορική ανισότητα για $\sigma(t)$ της μορφής

$$\sigma'(t) \le 2K\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)}. \tag{1.12}$$

Θα αποδείξουμε ότι από την (1.12) προκύπτει η

$$\sigma(t) \le [\sqrt{\sigma(t_0)} e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)]^2 \quad \text{για } \ t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{1.13}$$

Η περίπτωση $t \in [-T + t_0, t_0]$ εξετάζεται με τον ίδιο τρόπο. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$H(\sigma) = 2K\sigma + 2\varepsilon\sqrt{\sigma}$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ στο ημιεπίπεδο $\sigma \ge \sigma_0 > 0$. Πράγματι,

$$|H(\sigma_1) - H(\sigma_2)| = |2K\sigma_1 + 2\varepsilon\sqrt{\sigma_1} - 2K\sigma_2 - 2\varepsilon\sqrt{\sigma_2}| \le$$
$$\le 2K|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\varepsilon|\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}| = 2K|\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{2\varepsilon|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} =$$
$$(2K + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}})|\sigma_1 - \sigma_2| \le (2K + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_0}})|\sigma_1 - \sigma_2|$$

Βλέπουμε ότι

$$K_1 = 2K + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_0}} \to \infty \text{ αν το } \sigma_0 \to 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $H(\sigma)$ δεν είναι $Lipschitz$, αν $\sigma_0 = 0$.

Έστω $\sigma_0 = \sigma(t_0) > 0$, τότε η λύση της εξίσωσης

$$u'(t) = 2Ku(t) + 2\varepsilon\sqrt{u(t)}, \quad u \geq 0, \tag{1.14}$$

η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(t_0) = \sigma(t_0)$ θα παραμείνει στο ημιεπίπεδο $u \geq \sigma(t_0)$ για $t > t_0$, επειδή από την εξίσωση έχουμε ότι $u'(t) \geq 0$. Δηλαδή,

$$u(t) \geq \sigma(t_0) > 0 \ \text{ για } \ t > t_0.$$

Η εξίσωση (1.14) είναι η γνωστή εξίσωση του $Bernoulli$. Για να βρούμε την λύση της (1.14), που ικανοποιεί την συνθήκη $u(t_0) = \sigma(t_0)$, θα κάνουμε αλλαγή $v(t) = \sqrt{u(t)}$. Αυτό είναι εφικτό επειδή $u(t) \geq \sigma(t_0) > 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αντικατάσταση, από (1.14) θα περάσουμε στην

$$2vv' = 2Kv^2 + 2\varepsilon v.$$

Αφού $u(t) > 0$, επομένως $v(t) > 0$ για $t \geq t_0$, άρα είναι δυνατή η διαίρεση δια το v και έτσι καταλήγουμε στην

$$v' - Kv = \varepsilon, \quad v(t_0) = \sqrt{u(t_0)}. \tag{1.15}$$

Η λύση του προβλήματος (1.15) έχει την μορφή

$$v(t) = \sqrt{u(t_0)}e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1) = \sqrt{u(t)}.$$

Απο το Θεώρημα σύγκρισης (αφού έχουμε τις (1.12) και (1.14)) $u(t) \geq \sigma(t)$ και $\sqrt{u(t)} \geq \sqrt{\sigma(t)}$, συνεπώς

$$\sqrt{\sigma(t)} \leq \sqrt{u(t)} = \sqrt{\sigma(t_0)}e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)$$

και παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Από όπου αμέσως προκύπτει η (1.11).

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι για $u \geq \sigma_0$ έχουμε

$$|H(u) - H(\sigma)| \leq K_1|u - \sigma|$$

με

$$K_1 = 2K + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_0}} < \infty.$$

Έστω τώρα $\sigma(t_0) = 0$. Ας τονίσουμε ότι εδώ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεωρημα σύγκρισης διότι σε αυτήν την περίπτωση η H δεν είναι $Lipschitz$ συνεχής. Έστω $u_n(t)$ είναι η λύση της (1.14) με αρχική συνθήκη $u_n(t_0) = 1/n$. Θα αποδείξουμε ότι $u_n(t) \geq \sigma(t)$. Έστω ισχύει το αντίθετο και υπάρχει $t^* > t_0$ τέτοιο ώστε $u_n(t^*) < \sigma(t^*)$. Την αρχική στιγμή

$$\frac{1}{n} = u_n(t_0) > \sigma(t_0) = 0 \ \text{ και } \ u'(t_0) > \sigma'(t_0),$$

επομένως υπάρχει κάποιο διάστημα $[t_0, t_*]$ στο οποίο $u_n \geq \sigma$. Έστω $u_n(t_*) = \sigma(t_*)$. Η u_n είναι αύξουσα συνάρτηση και $u_n(t_0) = 1/n > 0$, επομένως

$$u_n(t_*) = \sigma(t_*) > 0 \ \text{ και } \ u_n(t) \leq \sigma(t), \ \text{ για } \ t_* \leq t \leq t^*.$$

Αν θα πάρουμε ως αρχική στιγμή το t_*, θα βρεθούμε υπό τις συνθήκες του προηγούμενου ισχυρισμού. Δηλαδή, αφού $\sigma(t_*) > 0$, η $H(\sigma)$ είναι $Lipschitz$ στο $\sigma \geq \sigma(t_*) > 0$ και επομένως, από το θεώρημα σύγκρισης, η λύση της (1.14) με αρχική συνθήκη $u(t_*) = \sigma(t_*)$ θα ικανοποιεί την ανισότητα $u_n(t) \geq$

$\sigma(t)$ για $t \geq t_*$. Άρα θα πρέπει $u_n(t^*) \geq \sigma(t^*)$, το οποίο αντιφάσκει με την αρχική προϋπόθεση $u_n(t^*) < \sigma(t^*)$. Επομένως

$$\sigma(t) \leq u_n(t) = [n^{-1/2} e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)]^2 \tag{1.16}$$

για $n > 0$. Περνώντας στο όριο στην (1.16), όταν $n \to \infty$, θα πάρουμε

$$\sigma(t) \leq [\frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)]^2,$$

που αντιστοιχεί στην (1.13) για $\sigma(t_0) = 0$.

□